

Lösungen zu den Übungsaufgaben in Kapitel 19

In den Online-Materialien finden Sie eine Datei mit dem Namen »daten_kap19.txt« sowie eine Anleitung zur Bedeutung der Variablen in den Spalten. Lesen Sie die Daten in ein Statistikprogramm (z. B. SPSS oder R) ein und lösen Sie die folgenden Aufgaben:

- (1) Berechnen und interpretieren Sie die Intraklassen-Korrelation für die Variablen Peer-Status (*PEER*) und Leistungsfähigkeit (*LEISTUNG*).

Peer-Status: Für die Level-1-Residualvarianz ergibt sich ein Wert von $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 60,95$; für die Varianz der zufälligen Achsenabschnitte ergibt sich ein Wert von $\hat{\sigma}_{v_0}^2 = 42,54$. Die Intraklassen-Korrelation (siehe Formel F 19.29) beträgt damit $\hat{\rho} = \hat{\sigma}_{v_0}^2 / (\hat{\sigma}_{v_0}^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2) = 42,54/103,49 = 0,411$. Das bedeutet: Ca. 41 % der Varianz des Peer-Status geht auf Unterschiede zwischen den Klassen (d. h. Unterschiede in den Klassenmittelwerten) zurück, 59 % der Varianz des Peer-Status geht auf Unterschiede zwischen Schülern innerhalb der Klassen zurück.

Leistungsfähigkeit: Für die Level-1-Residualvarianz ergibt sich ein Wert von $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 19,69$; für die Varianz der zufälligen Achsenabschnitte ergibt sich ein Wert von $\hat{\sigma}_{v_0}^2 = 139,46$. Die Intraklassen-Korrelation (siehe Formel F 19.29) beträgt damit $\hat{\rho} = \hat{\sigma}_{v_0}^2 / (\hat{\sigma}_{v_0}^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2) = 139,46/159,15 = 0,88$. Das bedeutet: Ca. 88 % der Varianz der Leistung geht auf Unterschiede zwischen den Klassen (d. h. Unterschiede in den Klassenmittelwerten) zurück, nur 12 % der Varianz der Leistung geht auf Unterschiede zwischen Schülern innerhalb der Klassen zurück.

- (2) Testen Sie mit Hilfe eines Random-Coefficients-Modells die Hypothese, dass der Peer-Status eines Schülers (*Y*) von seiner Aggressionsneigung (*X*) abhängt und dass dieser Effekt zwischen den Schulklassen unsystematisch variiert. Interpretieren Sie alle Modellparameter (einschließlich der Varianzkomponenten im zufälligen Teil des Modells) und inspizieren Sie, ob die Parameter signifikant von 0 abweichen.

Das Modell lautet hier:

$$\text{Level-1: } PEER_{mi} = \beta_{0i} + \beta_{1i} \cdot AGG_{mi} + \varepsilon_{mi}$$

$$\text{Level-2: } \beta_{0i} = \gamma_{00} + v_{0i}$$

$$\beta_{1i} = \gamma_{10} + v_{1i}$$

$$\text{Gesamtmodell: } PEER_{mi} = \gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot AGG_{mi} + v_{0i} + v_{1i} \cdot AGG_{mi} + \varepsilon_{mi}$$

	Schätzung	Standardfehler	Wert der Prüfgröße
Achsenabschnitt ($\hat{\gamma}_{00}$)	9,29	1,46	$t = 6,35^*$
Regressionsgewicht Aggression ($\hat{\gamma}_{10}$)	-1,06	0,10	$t = -10,34^*$
Varianz der Level-1-Residuen ($\hat{\sigma}_\varepsilon^2$)	56,62	3,51	$z = 16,12^*$
Varianz der zufälligen Achsenabschnitte ($\hat{\sigma}_{v_0}^2$)	12,17	10,58	$z = 1,15$
Varianz der zufälligen Regressionsgewichte ($\hat{\sigma}_{v_1}^2$)	0,04	0,08	$z = 0,57$
Kovarianz $\hat{\sigma}_{v_0v_1}$	0,56	0,88	$z = 0,64$

Die mit * gekennzeichneten Werte der jeweiligen Prüfgrößen sind auf dem 5 %-Niveau signifikant, die nicht gekennzeichneten Werte weichen nicht bedeutsam von 0 ab. Die Aggressionsneigung der Schüler hat demnach einen bedeutsamen negativen Einfluss auf den Peer-Status; die Unterschiede zwischen den Klassen hinsichtlich der zufälligen Achsenabschnitte und der zufälligen Regressionsgewichte sind hingegen nicht bedeutsam. Allerdings bleibt ein beträchtlicher Teil der Varianz im Peer-Status auf Schüler-ebene unaufgeklärt.

(3) Wie groß ist der Anteil der Varianz der Variablen Peer-Status (\mathcal{Y}), der durch die Aggressionsneigung (\mathcal{X}) aufgeklärt wird?

Die anteilige Reduktion der Level-1-Residualvarianz berechnet sich laut Formel F 19.31 aus der Level-1-Residualvarianz eines Random-Intercept-Modells (d. h. ohne zufällige Regressionsgewichte) und der Level-1-Residualvarianz des Intercept-Only-Modells. Die Level-1-Residualvarianz eines Random-Intercept-Modells beträgt $\hat{\sigma}_{\varepsilon,2}^2 = 56,79$. Die Level-1-Residualvarianz des Intercept-Only-Modells beträgt $\hat{\sigma}_{\varepsilon,1}^2 = 60,95$. Damit beträgt die anteilige Reduktion der Level-1-Residualvarianz $R_X^2 = (\hat{\sigma}_{\varepsilon,1}^2 - \hat{\sigma}_{\varepsilon,2}^2) / \hat{\sigma}_{\varepsilon,1}^2 = (60,95 - 56,79) / 60,95 = 0,068$. Das bedeutet: Ca. 7 % der Varianz im Peer-Status auf Schüler-ebene kann durch die Aggressionsneigung aufgeklärt werden.

Die anteilige Reduktion der Gesamtvarianz (s. Formel F 19.32) beträgt

$$R_X^{2'} = \frac{(\hat{\sigma}_{v_{0,1}}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon,1}^2) - (\hat{\sigma}_{v_{0,2}}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon,2}^2)}{\hat{\sigma}_{v_{0,1}}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon,1}^2} = \frac{103,49 - 63,17}{103,49} = 0,39.$$

Das bedeutet: Ca. 39 % der Varianz im Peer-Status (insgesamt, d. h. auf Schüler- und auf Klassenebene gemeinsam) kann durch die Aggressionsneigung aufgeklärt werden. Der große Unterschied zwischen R_X^2 und $R_X^{2'}$ legt nahe, dass es auch auf Klassenebene einen beträchtlichen Teil aufgeklärte Varianz des Peer-Status durch die Aggressionsneigung der Schüler gibt.

(4) Testen Sie die Hypothese, dass der Effekt der Aggressionsneigung eines Schülers innerhalb der Klasse (\mathcal{X}) auf die Leistungsfähigkeit (\mathcal{Y}) davon abhängt, wie groß der Jungenanteil in einer Klasse (\mathcal{Z}) ist; d. h., testen Sie die Interaktion $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$. Interpretieren Sie die Modellparameter. Wie viel Varianz klärt der Interaktionseffekt auf?

Das Modell lautet hier:

Level-1: $LEIST_{mi} = \beta_{0i} + \beta_{1i} \cdot AGG_{mi} + \varepsilon_{mi}$

Level-2: $\beta_{0i} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot AJ_i + v_{0i}$

$\beta_{1i} = \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot AJ_i + v_{1i}$

Gesamtmodell: $LEIST_{mi} = \gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot AGG_{mi} + \gamma_{01} \cdot AJ_i + \gamma_{11} \cdot AGG_{mi} \cdot AJ_i + v_{0i} + v_{1i} \cdot AGG_{mi} + \varepsilon_{mi}$

Die Schätzungen der einzelnen Modellparameter sind in der folgenden Tabelle abgetragen. Dabei wurden die beiden unabhängigen Variablen AGG und AJ an ihrem jeweiligen Gesamtmittelwert (*grand mean*) standardisiert, um Multikollinearität durch die Hinzunahme des Produktterms zu vermeiden (s. Kap. 18).

	Schätzung (Standardfehler)
Achsenabschnitt ($\hat{\gamma}_{00}$)	36,18 (1,84)
Aggressionsneigung AGG ($\hat{\gamma}_{10}$)	-3,56 (1,08)
Relative Anzahl Jungen pro Klasse AJ ($\hat{\gamma}_{01}$)	1,66 (1,85)
Cross-Level-Interaktion $AGG \times AJ$ ($\hat{\gamma}_{11}$)	-1,50 (1,12)
Varianz der Level-1-Residuen ($\hat{\sigma}_e^2$)	19,50 (1,25)
Varianz der zufälligen Achsenabschnitte ($\hat{\sigma}_{v_0}^2$)	67,75 (29,83)
Varianz der zufälligen Regressionsgewichte ($\hat{\sigma}_{v_1}^2$)	7,67 (8,09)
Kovarianz ($\hat{\sigma}_{v_0 v_1}$)	2,08 (10,48)

Der Effekt der Cross-Level-Interaktion $X \times Z$ (oder $AGG \times AJ$), ausgedrückt durch den Parameter γ_{11} , ist hier nicht signifikant, $t = -1,5/1,12 = 1,34$; $p = 0,19$. Der Effekt der Aggressionsneigung auf die Leistungsfähigkeit hängt also nicht von der Anzahl Jungen pro Klasse ab. Der standardisierte Effekt der Interaktion kann mit Hilfe von Formel F 19.44 geschätzt werden. Die Varianz der zufälligen Regressionsgewichte im Modell mit Interaktionsterm beträgt $\hat{\sigma}_{v_{1-2}}^2 = 7,674$; die Varianz der zufälligen Regressionsgewichte im Modell ohne Interaktionsterm beträgt $\hat{\sigma}_{v_{1-1}}^2 = 7,924$. Daraus ergibt sich ein Wert von $R_{X \times Z}^2 = (\hat{\sigma}_{v_{1-1}}^2 - \hat{\sigma}_{v_{1-2}}^2) / \hat{\sigma}_{v_{1-1}}^2 = (7,924 - 7,674) / 7,924 = 0,032$. Der Interaktionseffekt klärt also einen Anteil von 3,2 % der Varianz in den zufälligen Regressionsgewichten auf.

(5) Prüfen Sie über einen direkten Modellvergleich, ob das Modell mit Interaktionseffekt $X \times Z$ signifikant besser auf die Daten passt als das Modell ohne Interaktionseffekt.

Die Devianz eines Random-Coefficients-Modells ohne den Interaktionsterm beträgt $Dev_1 = 3278,875$. Die Devianz eines Random-Coefficients-Modells mit dem Interaktionsterm beträgt $Dev_2 = 3275,043$. Die beiden Devianzen lassen sich mit Hilfe von Formel F 19.25 direkt miteinander vergleichen: $\Delta Dev = Dev_1 - Dev_2$. In unserem Beispiel ergibt sich ein Wert von $\Delta Dev = 3,83$. Diese Differenz ist approximativ χ^2 -verteilt mit $df = q_2 - q_1$ Freiheitsgraden. In unserem Beispiel ist $df = 1$. Der kritische Wert auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ (einseitiger Test) beträgt $\chi_{(0,95;1)}^2 = 3,84$. Unser Wert liegt knapp unter diesem kritischen Wert; das Modell, das den Interaktionsterm mit einschließt, passt demnach nicht signifikant besser auf die Daten als das Modell, das den Interaktionsterm nicht mit einschließt.